

数 学 問 題 ・ 答 案 用 紙 (一)

I. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ として次の問いに答えよ。

1) 8^{2021} は何桁の整数か。

2) 8^{2021} の最高位の数字は何か。

3) 8^{2021} の一の位の数字は何か。

II. Aさんは、訪問先を訪ねると $\frac{1}{9}$ の確率で傘を忘れてきてしまう。ある日、傘を1本持って出発したAさんが20か所の訪問先を回り帰宅したとき、傘を忘れてきたことに気がついた。偶数番目のいずれかの訪問先に傘を忘れてきた確率を求めよ。

III. 関数 $y = 3 \cos 2x + 2 \cos x(4 \tan x + \cos x) - 3$ の定義域と値域を求めよ。

IV. a, b を相異なる実数とする。2つの関数

$$f(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3bx + a,$$

$$g(x) = bx^3 + 3ax^2 + 3ax + b$$

のうち少なくとも一方は極値をもつことを示せ。

V. 四面体 OABC について, 次の問いに答えよ。

1) この四面体の各頂点とそれらの対面の三角形の重心を結ぶ 4 本の線分は, 1 点で交わることを示せ。

2) 1) で示された交点を G とする。この四面体が正四面体であるとき, $\cos \angle OGA$ の値を求めよ。